

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ТРЕНИЯ

Отримано нове диференціальне рівняння граничного стану стисливого матеріалу в локальних ділянках з урахуванням внутрішнього і зовнішнього тертя, розв'язання якого дозволяє розкрити особливості матеріалів.

DIFFERENTIAL EQUATION OF LIMITING CONDITION DEFORMED HARD MATERIAL WITH PROVISION FOR INTERNAL AND EXTERNAL FRICTION

Received new differential equation of limiting condition of compressing material in local areas with provision for internal and external friction, which decision allows revealing particularities of material.

В литературе имеется двузначное понимание процесса разрушения твердых материалов. Одни исследователи высказывают мнение, что разрушение есть продолжение процесса деформирования [1], другие – эти процессы не связывают между собой, полагая, что деформирование является одним из возможных, но не обязательных способов активизации разрушения [2]. По нашим представлениям, разрушение материала начинается за пределом упругости в локальной области, после чего оно при дальнейшем нагружении происходит как два последовательных цикла единого процесса деформирования, при котором в одних областях материала происходит разрушение, в других – упругое состояние. Причиной этого является внешнее трение, которое всегда в той иной мере участвует в процессе разрушения материалов, поэтому пренебрегать им нельзя. В данной статье попытаемся доказать, что факт формирования очагов разрушения происходит в локальных областях по траекториям максимальных эффективных касательных напряжений (ТМЭКН) за счет внешнего трения и одновременно показать, что при его отсутствии разрушение (текучесть) материала идет по всему сечению материала. Под понятием эффективного касательного напряжения принимается кулоновское активное касательное напряжение за вычетом фрикционного касательного напряжения от внутреннего трения. Составим схему напряжений и схему ТМЭКН при деформировании образца (рис. 1). Толщину и ширину образца обозначим через h и a . Касательные контактные напряжения τ_k направим против поперечной деформации. Поскольку нагружение и деформирование образца симметрично, то будем рассматривать его левую продольную половину. Для удобства построения ТМЭКН центр осей координат XU расположим в верхнем левом углу образца. Рассмотрим равновесие двух треугольников, формируемых ТМЭКН. Выделим на ТМЭКН av эти два треугольника aes и $ve's'$, контактируемые с верхней и нижней плитами процесса и покажем, что под воздействием внешнего (контактного) τ_k они находятся в разном напряженном состоянии. Контактное напряжение τ_k оттягивает треугольник aes от ТМЭКН, а треугольник $ve's'$, наоборот, прижимает к МЭКН. В соответствии

с этим возникает различный вид воздействия напряжения τ_k (рис. 2) на треугольники. Поэтому в верхнем левом углу возможно возникновение растягивающих поперечных нормальных напряжений, внизу на ТМЭКН возникают только сжимающие поперечные напряжения.

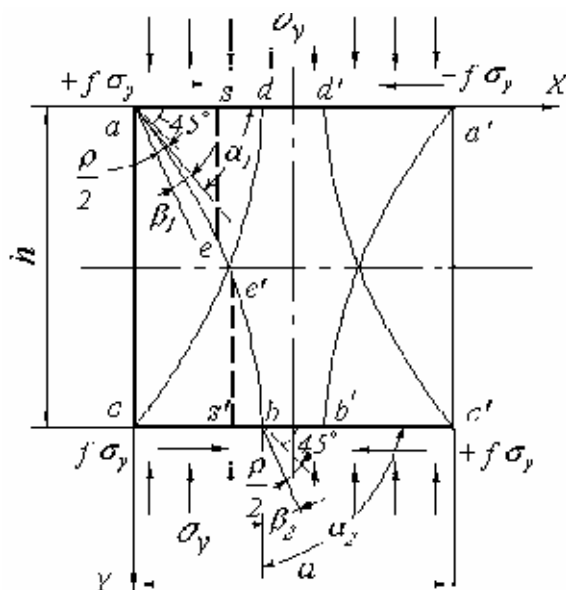


Рис.1 – Схема сетки линий скольжения в образце горной породы при наличии внешнего и внутреннего трения

Согласно правилу знаков в верхней левой четверти образца τ_k принимается положительным, а в нижней левой четверти – отрицательным. Поэтому, если в верхнем левом углу эффективное касательное напряжение (ЭКН) достигает предельной сопротивляемости материала сдвигу k , т.е. происходит разрушение (образование трещины) в локальной области образца, то на ТМЭКН в нижней части ЭКН не достигает значения k , т.е. материал здесь находится в упругом состоянии. Для математического описания равновесия используем критерий Кулона

$$\tau_s = |\tau_\alpha| - \mu\sigma_\alpha \leq k \quad (1)$$

где τ_s – эффективное касательное напряжение на ТМЭКН; τ_α – активное касательное напряжение на ТМЭКН, μ – коэффициент внутреннего трения, σ_α – нормальное напряжение на ТМЭКН.

Из выражения (1) вытекает, что при равенстве $\tau_s = k$ происходит разрушение, при неравенстве $\tau_s < k$ – упругое состояние материала. В первую очередь, равенство возникает в угловых областях образца вследствие отсутствия нормальных и касательных напряжений на свободных поверхностях. В остальных зонах имеет место равновесное упругое состояние.

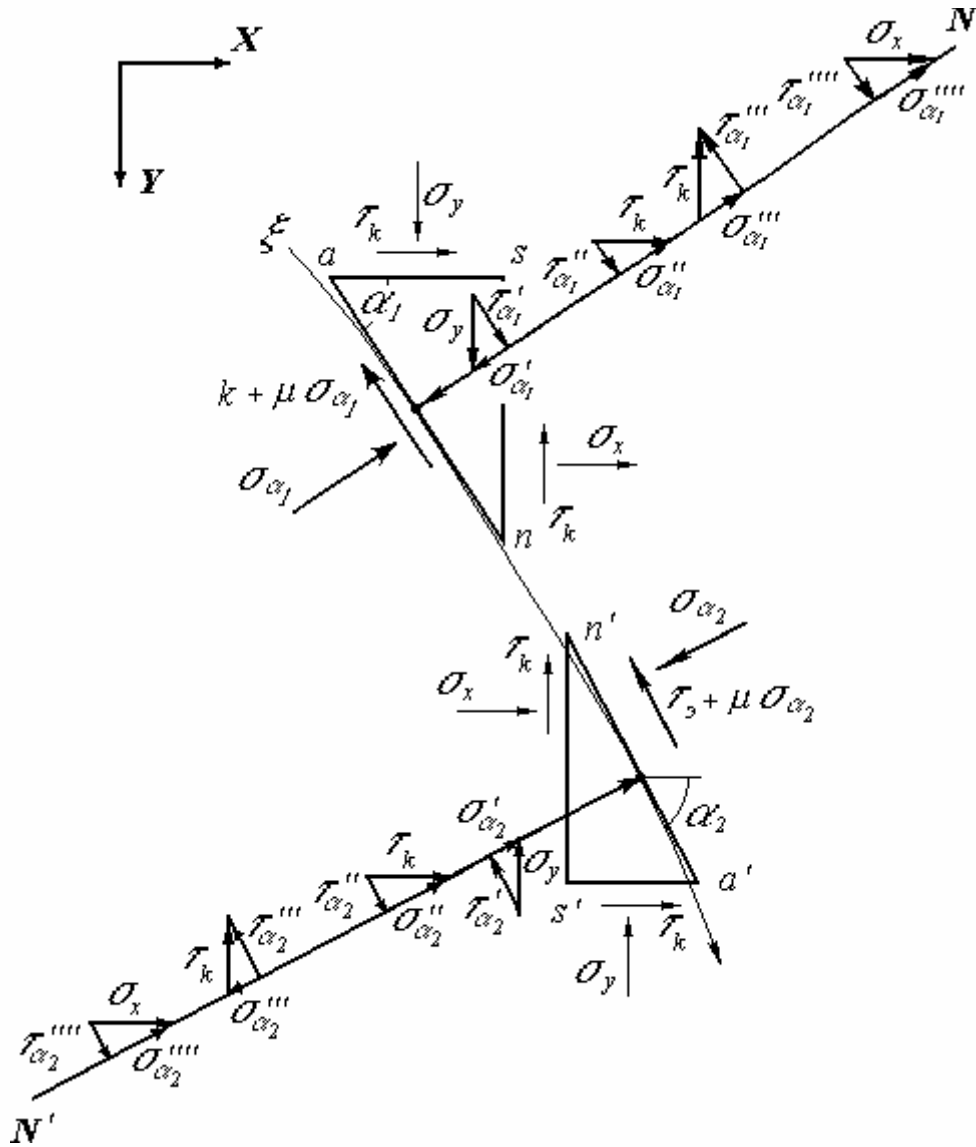


Рис.2 – Равновесные треугольники на траектории максимальных эффективных касательных напряжений

Теперь найдем математическую связь между нормальными и касательными напряжениями через угол α наклона касательных an и $a'n'$ относительно оси x .

Для этого спроецируем силы, приложенные к треугольникам, на направление нормали к элементу на ТМЭКН ξ в точках O и O' . Из суммирования составляющих касательных и нормальных напряжений после преобразований имеем

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_k \cos 2\alpha \quad (2)$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - \tau_k \sin 2\alpha \quad (3)$$

После подстановки этих уравнений в выражение (1) получено

$$\tau_{\vartheta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{\kappa} \sin 2\alpha - \mu \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{\kappa} \sin 2\alpha \right) \leq k \quad (4)$$

Теперь найдем угол наклона площадки ТМЭКН, при котором τ_{ϑ} будет иметь максимальное значение,

$$\frac{\partial \tau_{\vartheta}}{\partial \alpha} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha - 2f\sigma_y \sin 2\alpha - \mu [(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha - 2f\sigma_y \cos 2\alpha] = 0 \quad (5)$$

Тогда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y) - 2\mu\tau_{\kappa}}{\mu(\sigma_x - \sigma_y) + 2\tau_{\kappa}} \quad (6)$$

Выражаем тригонометрические функции $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ через $\operatorname{tg} 2\alpha$ согласно выражению (6) и подставляем их в выражение (4).

После преобразований выражения (4) имеем

$$\tau_{\vartheta} = \frac{1}{2} \cos \rho \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{\kappa}^2} - \frac{\mu(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \quad (7)$$

С помощью функций $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ преобразуем уравнение (2)

$$\tau_{\alpha} = \frac{\cos \rho}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{\kappa}^2} \quad (8)$$

а уравнение (3) продифференцируем по α

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin 2\alpha - 2\tau_{\kappa} \cos 2\alpha$$

Преобразуем это выражение с помощью тригонометрических функций

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = \cos \rho \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{\kappa}^2} \quad (9)$$

Из сравнения выражений (8) и (9) имеем

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = 2\tau_{\alpha} \quad (10)$$

Определяем выражение активного касательного напряжения из уравнения (1) и подставляем его в уравнение (10). После чего получим важное дифференциальное уравнение пластично-упругого состояния материала на ТМЭКН

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = 2(\tau_{\alpha} + \mu\sigma_{\alpha}) \quad (11)$$

Теперь предстоит выразить напряжения σ_{α} и τ_{α} через нормальное напряжение σ_y в верхней левой угловой точке.

Решение этого уравнения представим в виде

$$\ln(\tau_{\alpha} + \mu\sigma_{\alpha}) \Big|_{\sigma_{\alpha 1}}^{\sigma_{\alpha 2}} = 2\mu\alpha_{ba} \quad (12)$$

Эффективное касательное напряжение в левом верхнем углу принимаем равным k – сопротивляемости материала сдвигу для хрупкого материала или для пластичного материала – постоянной пластичности, где $\sigma_{\alpha 1}$ – нормальное напряжение на ТМЭКН в левом верхнем углу; $\sigma_{\alpha 2}$ – нормальное напряжение в точке возврата ТМЭКН (на нижней контактной плоскости).

Из решения уравнения (12) для верхней левой четверти образца имеем

$$\frac{\tau_{\alpha} + \mu\sigma_{\alpha 2}}{k + \mu\sigma_{\alpha 1}} = e^{2\mu\alpha_{ba}} \quad (13)$$

Теперь предстоит найти выражение для τ_{α} в точке выхода ТМЭКН на нижнюю контактную плоскость или в точке пересечения с продольной осью симметрии. В этом случае решение дифференциального уравнения (11) имеет вид

$$\frac{k + \mu\sigma_{\alpha 1}}{\tau_{\alpha} + \mu\sigma_{\alpha 2}} = e^{-2\mu\alpha_{ab}} \quad (14)$$

Теперь необходимо решить задачу определения контактных выражений для $\sigma_{\alpha 1}$, $\sigma_{\alpha 2}$, α_1 , и α_2 .

Нормальное напряжение определяем по формуле (3). После подстановки выражений тригонометрических функций $\text{Sin}\alpha$ и $\text{Cos}\alpha$ имеем

$$\sigma_{\alpha 1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\text{Sin}\rho}{2} \sqrt{(2\tau_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_k^2} \quad (15)$$

Полусумма нормальных напряжений из выражения (7) равна

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_y}{\cos^2 \rho} + \tau_y \mu - \frac{\tau_y + \mu \sigma_y}{\cos \rho} \sqrt{1 - b_{1,2}^2} \quad (16)$$

где

$$b_{1,2} = \frac{\tau_{ky}}{\tau_y + \mu \sigma_y}$$

Индекс 1 относится к верхнему левому углу, индекс 2 – к точкам выхода ТМЭКН на нижнюю плоскость или пересечения ТМЭКН с продольной осью образца.

После подстановки уравнения (16) в выражение (15) и замены подрадикального выражения из уравнения (8) имеем

$$\sigma_{\alpha_{1,2}} = \sigma_y \left(1 - \sin \sqrt{1 - b_{1,2}^2} \right) - \tau_y \cos \rho \sqrt{1 - b_{1,2}^2} \quad (17)$$

Параметр « b » определяется с учетом знака τ_k для верхней и нижней четверти образца.

Нормальное напряжение $\sigma_{\alpha l}$ на контактной поверхности верхней четверти с учетом ранее изложенной особенности (рис. 1) контактного трения принимается в виде

$$\sigma_{\alpha_{1k}} = k \cos \rho \sqrt{1 - b_1^2};$$

на нижней поверхности

$$\sigma_{\alpha_{2\tau_y}} = \tau_y \cos \rho \sqrt{1 - b_2^2}$$

Из уравнений (13), (14) и (17) после образований имеем систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_y = \frac{k(1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_1^2}) e^{2\mu \alpha_{ba}} - \tau_y (1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_2^2})}{\mu (1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_2^2})} \end{array} \right. \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_y = \frac{\mu \sigma_y (1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_1^2}) + k(1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_1^2})}{(1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_2^2}) e^{-2\mu \alpha_{ab}}} \end{array} \right. \quad (19)$$

Теперь предстоит решить задачу определения угла поворота ТМЭКН $\alpha_{ав} = \alpha_2 - \alpha_1$. Для этого используем равенство (6), предварительно обозначив отношение

$$\operatorname{arctg} \frac{2\tau_k}{\sigma_x - \sigma_y} = 2\beta \quad (20)$$

где β – угол поворота ТМЭКН от внешнего трения.

Тогда формула угла наклона ТМЭКН после преобразований выражения (6) будет иметь вид

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \rho/2 + \beta \quad (21)$$

Теперь определим разность $\sigma_x - \sigma_y$ для выражения (20). В работе [3] уравнение равновесия (7) приведено к виду

$$\sigma_x = \frac{2(\tau_s + \mu\sigma_y)(\operatorname{Sin}\rho - \sqrt{1-b^2})}{\operatorname{Cos}\rho} + \sigma_y$$

Определяя из этого выражения упомянутую разность и подставляя ее в уравнение (20), имеем

$$\beta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b \cdot \operatorname{Cos}\rho}{\operatorname{Sin}\rho - \sqrt{1-b^2}} \quad (22)$$

Важно отметить, что знак угла β в выражении (21) определяется знаком контактного трения. Наряду с этим, знак этого угла может поменяться на обратный при условии $\operatorname{Sin}\rho < \sqrt{1-b^2}$.

Следовательно, из правила знаков на верхней левой четверти τ_k положительно, а на нижней – отрицательно, а при условии $\operatorname{Sin}\rho < \sqrt{1-b^2}$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{4} + \rho/2 - \beta \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{4} + \rho/2 + \beta_2$$

С учетом этого угол поворота ТМЭКН в выражении (18) имеет вид $\alpha_{ва} = \beta_2 + \beta_1$, а в выражении (19) - $\alpha_{ав} = \beta_1 - \beta_2$.

Таким образом, используя изложенные результаты, может быть определено предельное разрушающее нормальное напряжение в угловых областях образца

при наличии контактного трения материала, как пластичного, так и хрупкого. Если принять контактное трение равным нулю, то придем к подходам теории пластичности ($\rho=0$) [4] и теории предельного состояния хрупкого материала ($\rho>0$) [5], в которых принимается на линии скольжения значение максимально-го касательного напряжения равным постоянной пластичности – сопротивляемости материала сдвигу (в механике горных пород – о сопротивлению материала от сцепления).

Выводы

Разработан подход к определению предельного сжимающего нормального напряжения, которое обеспечивает образование трещин в угловых локальных областях образцов из твердого деформируемого материала с учетом контактного трения при наличии зон упругого состояния. С использованием известных дифференциальных уравнений равновесия на контактных плоскостях и известной закономерности уменьшения касательного напряжения вдоль оси образца представляется возможным разработать метод расчета предела прочности материалов при одноосном сжатии, что и будет представлено в последующих публикациях

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1.Криничанский Г.Т. Элементы теории деформирования и разрушения горных пород. – К.: наук. думка, 1989. – 184 с.
- 2.Регель В.Г., Слуцкер А.И., Томашевский Э.И. Кинетическая природа прочности твердых тел. – М.: Наука, 1974. – 550 с.
- 3.Васильев Д.Л. Метод расчета горизонтальных нормальных напряжений в массивах горных пород // Геотехническая механика, выпуск 29. – Днепропетровск: ИГТМ НАНУ, 2002. – С. 161-165.
- 4.Качанов Л.М. Основы теории пластичности. - М.: Наука, 1969. – 419 с.
- 5.Баклашов И.В., Картозия Б.А. Механические процессы в породных массивах. – М.: Недра, 1986. –271 с.

УДК 622.74-913.3:621.928.8:532.5

А.И. Шевченко

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ КОНУСНОГО СМЫВНОГО УСТРОЙСТВА

Наведено експериментальні дослідження процесу змиву магнітного продукту з ферромагнітних пластин роторних магнітних сепараторів. Запропоновано початкові вимоги и рекомендована схема на створення промислового зразка конусного змивного пристрою.

ESTIMATION OF A CONE WASHING DEVICE OVERALL PERFORMANCE

There're given experimental researches of washing process of a magnetic product with ferromagnetic magnetic separates of rotor plates. There're offered initial requirements and recommended circuit on creation of an industrial sample cone washing device.

При обогащении тонкозернистых слабомагнитных руд широко применяются роторные магнитные сепараторы [1], в которых для смыва с ферромагнитных пластин магнитного продукта используются смывные устройства – брызгала.